

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$	۱/۵
۲	با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آنگاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است.	۱
۳	می دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می باشد.	۱
۴	اگر a, b اعداد حقیقی باشند بطوریکه $(ab < 0)$ ، ثابت کنید: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$	۱
۵	مدرسه ای ۶۰۱ نفر دانش آموز دارد، حداقل چند نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟	۱
۶	اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n < 4\}$ و $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$ دو مجموعه باشند: الف) A, B را با نوشتن اعضا مشخص کنید و سپس اعضای $A \times B$ را بنویسید. ب) اگر R یک رابطه از A در B به صورت زیر باشد: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x+y < 6\}$ عضوهای رابطه ی R را مشخص کنید.	۱/۷۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	۱
۸	اگر $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ مطلوبست: $A_7 - (A_1 \cap A_3)$	۱/۲۵
۹	رابطه ی R روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 - z^2 = y - t$ الف) نشان دهید رابطه ی R هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۰	یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن سکه پشت و عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد را مشخص کنید. پ) پیشامد B که در آن سکه رو و عدد تاس زوج باشد را بنویسید. ت) پیشامد $A' \cap B'$ را بنویسید.	۲
	"ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم"	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	کیسه ای شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم، مطلوبست احتمال آنکه حداقل ۲ مهره ی سفید خارج شده باشد.	۱/۵
۱۲	اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی باشد و داشته باشیم: $p(a) = 3p(b)$, $p(c) = \frac{1}{4}$, $p(d) = \frac{1}{8}$ مطلوبست محاسبه ی $p(a')$ و $p(b)$.	۱/۲۵
۱۳	آزمونی شامل ۱۵ سؤال دو گزینه ای (درست - غلط) می باشد، دانش آموزی بطور تصادفی به همه سؤالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به ۷ سؤال پاسخ درست داده باشد، چقدر است؟	۰/۷۵
۱۴	دو عدد حقیقی به تصادف از بازه ی $[-1, 2]$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه مجموع این دو عدد مثبت باشد را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	از مجموعه ی اعداد $\{1, 2, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم: الف) احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد را بیابید. ب) احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد را بیابید.	۲
	« موفق باشید »	جمع نمره
		۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱/۵	$p(1) : 1 \times 2 = 1^2(1+1) \quad (0/25)$ $p(k) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1) \quad (0/25) \quad \text{فرض استقراء}$ $p(k+1) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2) \quad (0/25) \quad \text{حکم استقراء}$ $= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2 + 3k + 2) = (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2) \quad (0/5)$	۱
۱	$x(x+3) = 3q(3q+3) = 9q(q+1) = 9(2t) = 18t \quad (0/25)$ $x(x+3) = 18t \quad (0/5)$ <p>ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است</p>	۲
۱	<p>فرض $\sqrt{2}$ گنگ: فرض خلف $\sqrt{1+\sqrt{2}} = a$ گویا $\Rightarrow 1+\sqrt{2} = a^2 \Rightarrow \sqrt{2} = a^2 - 1$ گویا گنگ (تناقض)</p> <p>حکم: $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ گنگ $(0/25)$</p> <p>تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می دهد که خلاف حکم برقرار نمی باشد) $(0/25)$</p>	۳
۱	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \leq -2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0 \quad (0/25)$ <p>عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می باشند. $(0/25)$</p>	۴
۱	$m = \text{تعداد کبوتر} = 601 \quad (0/25)$ $601 = 50 \times 12 + 1 \quad (0/25)$ $n = \text{تعداد لانه} = 12$ <p>طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها $50+1=51$ کبوتر خواهد بود $(0/25)$، یعنی حداقل ۵۱ دانش آموز ماه تولد یکسان را دارند. $(0/25)$</p>	۵
۱/۷۵	<p>الف) $A = \{2, 4, 8\} \quad (0/25)$, $B = \{-1, 1, 3\} \quad (0/25)$</p> $A \times B = \left\{ \begin{matrix} (2, -1), & (2, 1), & (2, 3) \\ (4, -1), & (4, 1), & (4, 3) \\ (8, -1), & (8, 1), & (8, 3) \end{matrix} \right\} \quad (0/75) \quad \text{هر سه زوج نوشته شده} \quad (0/25)$ <p>ب) $R = \left\{ \begin{matrix} (2, -1), & (2, 1) \\ (2, 3), & (4, -1), & (4, 1) \end{matrix} \right\} \quad (0/5)$</p>	۶
« ادامه ی پاسخنامه در صفحه ی دوم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱
نمره	راهنمای تصحیح	
ردیف		

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱	$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C' =$ $[(A \cap B') \cup \phi] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$	۷
۱/۲۵	$A_1 = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (0/25)$ $A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad (0/25)$ $A_1 \cap A_2 = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A_3 - (A_1 \cap A_2) = \{-2, 2\} \quad (0/25)$	۸
۱/۵	<p>(الف) $\forall (x, y) \in R^2, (x, y) R(x, y) \Rightarrow x^2 - x^2 = y - y$ رابطه‌ی بازتابی (۰/۲۵)</p> <p>$(x, y) R(z, t) \Rightarrow (z, t) R(x, y)$</p> <p>$(x, y) R(z, t) \Rightarrow x^2 - z^2 = y - t \Rightarrow z^2 - x^2 = t - y \Rightarrow (z, t) R(x, y)$ رابطه‌ی تقارنی (۰/۲۵)</p> <p>$(x, y) R(z, t) \Rightarrow (x, y) R(e, f)$</p> <p>$(z, t) R(e, f) \Rightarrow x^2 - z^2 = y - t \Rightarrow x^2 - e^2 = y - f \Rightarrow (x, y) R(e, f)$ رابطه‌ی تعدی (۰/۵)</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است.</p> <p>(ب) $[(-1, 2)] = \{(x, y) (x, y) R(-1, 2)\} \Rightarrow \{(x, y) x^2 - 1 = y - 2\} = \{(x, y) y = x^2 + 1\}$ (۰/۲۵)</p>	۹
۲	<p>(الف) $S = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6)\} \cup \{(p, 1), (p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6)\}$ (۰/۵)</p> <p>ب) $A = \{(p, 4), (p, 5), (p, 6)\}$ (۰/۵)</p> <p>پ) $B = \{(r, 2), (r, 4), (r, 6)\}$ (۰/۵)</p> <p>ت) $A' \cap B' = (A \cup B)' = \{(p, 1), (p, 2), (p, 3), (r, 1), (r, 3), (r, 5)\}$ (۰/۵)</p>	۱۰
۱/۵	<p>$n(S) = \binom{11}{3} = 165$ (۰/۲۵) $n(A) = \binom{5}{2} \binom{6}{1} + \binom{5}{3} = 70$ (۰/۲۵)</p> <p>$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{70}{165} = \frac{14}{33}$ (۰/۲۵)</p>	۱۱
« ادامه پاسخنامه در صفحه ی سوم »		

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	
نمره		

مصححین گرامی لطفاً به توضیحات صفحه چهار راهنمای تصحیح توجه نمایند.

۱۲	$p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \quad (./۲۵)$ $۳p(b) + \frac{p(b)}{(./۲۵)} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۸} = 1 \Rightarrow p(b) = \frac{۳}{۳۲} \quad (./۲۵)$ $p(a) = \frac{۹}{۳۲} \Rightarrow p(a') = 1 - \frac{۹}{۳۲} = \frac{۲۳}{۳۲} \quad (./۲۵)$	
۱۳	$p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n} = \frac{\binom{۱۵}{۷}}{۲^{۱۵}} \quad (./۲۵)$	
۱۴	$S = \{(x, y) \in R^2 \mid -1 \leq x \leq ۲, -1 \leq y \leq ۲\}$ $A = \{(x, y) \in S \mid x + y > ۰\} \quad (./۲۵)$ $a_S = ۹ \quad (./۲۵)$ $a_{A'} = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲ \quad (./۲۵) \Rightarrow a_A = ۹ - ۲ = ۷ \quad (./۲۵)$ $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۷}{۹} \quad (./۲۵)$	
۱۵	<p>A: عدد مضرب ۳ باشد $n(S) = ۱۰۰۰ \quad (./۲۵) \quad n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۳} \right] = ۳۳۳ \quad (./۲۵)$</p> <p>B: عدد مضرب ۵ باشد $n(B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۵} \right] = ۲۰۰ \quad (./۲۵) \quad n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵} \right] = ۶۶ \quad (./۲۵)$</p> <p>(الف)</p> $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (./۲۵)$ $p(A \cup B) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} + \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} - \frac{۶۶}{۱۰۰۰} = \frac{۴۶۷}{۱۰۰۰} \quad (./۲۵)$ <p>(ب)</p> $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) \quad (./۲۵)$ $p(A - B) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} - \frac{۶۶}{۱۰۰۰} = \frac{۲۶۷}{۱۰۰۰} \quad (./۲۵)$	
۲۰	جمع نمره	

با عرض خسته نباشید حضور همکاران گرامی، لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمائید.

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۹ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۱ / ۵ / ۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	صفحه چهار راهنمای تصحیح	
	نمره	

با توجه به مشکل جابجایی پرانتزها در تایپ سوال ۱۲، چنانچه دانش آموزی مسأله را تشخیص داده و حل نموده

است، بارم طبق راهنمای تصحیح منظور گردد. در غیر اینصورت سوال ۱۲ حذف و بارم آن به شرح ذیل توزیع گردد:

۱) در سوال ۱۱ بارم $0/75$ به ۱ نمره تغییر یابد (بارم سوال $1/75$ نمره)

۲) در سوال ۱۳ بارم $0/75$ به ۱ نمره تغییر یابد (بارم سوال ۱ نمره)

۳) در سوال ۱۴، $0/25$ به شکل و $0/25$ به قسمت S اضافه شود (بارم سوال ۲ نمره)

۴) در سوال ۱۵، $0/25$ به فرمول قسمت ب اضافه شود (بارم سوال $2/25$ نمره)